DS de CALCUL DES STRUCTURES

18

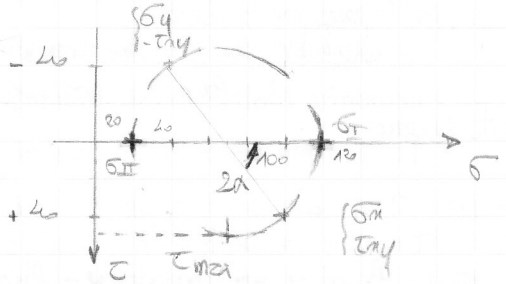
(4)

I - TENSEUR DES CONTRAINTES.

On a donc un tenseur de la forme

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x = 100 & \tau_{xy} = 40 \\ \tau_{yx} = 40 & \sigma_y = 40 \end{bmatrix}_{(x,y)}$$

On commence donc par dessiner le cercle de Mohr, en y positionnant les points correspondant aux etats de contrainte ci dessus, soit :



(pas de compas pour compléter le tracé !)

1. Ainsi, on connait les valeurs du diamètre de notre cercle de Mohr

soit donc les valeurs $d = ((\sigma_B - \sigma_A)^2 + (\tau_B - \tau_A)^2)^{1/2}$

$= \sqrt{10000} = 100$ MPa

d'où d'après le tracé du cercle on a σ_I = valeur σ_{centre} + rayon cercle

$= 40 + \frac{100-40}{2} + 50 = 120$ MPa

et σ_{II} = valeur σ_{centre} − rayon cercle $= 40 + \frac{100-40}{2} - 80 = 20$ MPa

On a donc le tenseur des contraintes suivant les directions principales

qui vaut $[\sigma] = \begin{bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}_{(x',y')}$ directions principales.

2. On trouve l'orientation des directions principales soit en realité on prend une facette orientée d'un angle α (pour la normale)

correspond à un angle de 2α sur le cercle

donc 2α sur le cercle $= \tan^{-1}\left(\frac{40}{30}\right) = 53,1°$

donc les directions principales x' et y' sont orientée de $26,56°$ par rapport au repère initial du premier tenseur de contraintes

3. La valeur du cisaillement maximum est lue sur le cercle de Mohr

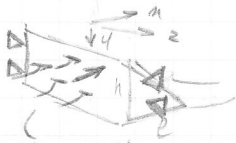
Elle correspond exactement à la valeur du rayon soit

$\tau_{xy\,max} = 50\,MPa$ / en 2D

(3)

II. ETUDES D'UN BARRAGE

1. On considère qu'il s'agit de déformations planes puisque l'on peut imaginer que la (1) n'autorisera pas de déformations suivant l'axe $\vec{z}$: en effet le barrage est "engoncé" dans une vallée et donc l'eau n'exerce pas de pression sur les côté (là où la roche est en contact) ; on peut penser au schéma suivant



appui imposés par la roche
déf suivant $\vec{z}$ nulles mais σ_z existent du fait du maintien //

(action de l'eau uniquement sur cette surface

2. Conditions limites

sur AB ($x=0$) on a $\sigma_y = \rho_b g y \rightarrow b_1 + b_3 y = \rho_b g y$ $\underline{b_1 = 0}$ $\underline{b_3 = \rho_b g}$

$\tau_{xy} = 0 \rightarrow c_1 + c_3 y = 0 \ \forall y$ $c_1 = c_3 = 0$

sur AC ($x = y$) on a $\tau_{xy} \neq 0 \rightarrow c_1 + c_2 x + c_3 x = 0 \ \forall x$

sur AB $\sigma_x = \rho_e g y = a_1 + a_3 y \rightarrow \underline{a_1 = 0}$ $\underline{a_3 = \rho_e g}$

→ soit les équations d'équilibre $\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0 \end{cases}$ 2D / $\sigma_{xy} = \tau_{xy}$

2

$f_x = 0$ // $f_y = \rho_b g$ // $\rightarrow a_2 +$

→

sur AB $\vec{n} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\vec{T_S} = \begin{vmatrix} \rho_e g y \\ 0 \end{vmatrix}$

sur AC $\vec{n} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\vec{T_S} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

$\begin{cases} \sigma_x - \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{xy} - \sigma_y = 0 \end{cases}$

3. On sait que $\vec{T_S} = [\sigma]\,\vec{n}$

donc sur AB on a $\vec{n} \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix}$

d'où $\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sigma_x \\ -\tau_{xy} \end{vmatrix}$ et en AB $x = 0$ (on remplace après)

Je sais comment résoudre mais je n'ai pas σ_x et τ_{xy}

d'où $\vec{T_S}$ effort de réaction vaut

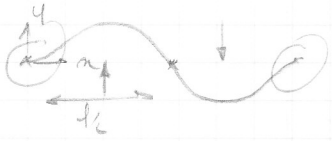
6

III - MÉTHODE DE RITZ

1) soit $\Pi(v(x)) = W - \int_{S_\sigma} \vec{t_S} \cdot \vec{u}\, ds - \int_v \vec{f_v}\, \vec{u}\, dv$

ici déplacement $u = v(x)$ $\Rightarrow$ pas d'efforts volumiques

et $W = \frac{1}{2} EI \int \ddot{v}^2 dx$



$x = l/2 \quad v(x) = 0$

on approxime avec une fonction sinusoïdale

de type $v(x) = a \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right)$ (a : amplitude)

d'où $\dot{v}(x) = a \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \times \frac{2\pi}{l}$

$\ddot{v}(x) = -a \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2$

d'où $W = \frac{1}{2} EI \int_0^l \left[-a \sin\left(\frac{2\pi}{l} x\right) \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2\right]^2 dx$ soit $\theta = \frac{2\pi x}{l}$

$d\theta = \frac{2\pi}{l} dx$

$= \frac{1}{2} EI\, a^2 \left(\frac{2\pi}{l}\right)^3 \int_0^l \sin^2\left(\frac{2\pi x}{l}\right) dx \left(\frac{2\pi}{l}\right)$

$\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \pi$

$= \frac{1}{2} EI\, \pi\, a^2 \left(\frac{2\pi}{l}\right)^3$

et $\phi(v(x)) = P_v\, v(l/4) - P_v\, v(3l/4)$

d'où $\Pi(v(x)) = \frac{1}{2} EI\, \pi\, a^2 \left(\frac{2\pi}{l}\right)^3 - P_v(l/4) + P_v(\frac{3l}{4})$

$= \frac{1}{2} EI\, \pi\, a^2 \left(\frac{2\pi}{l}\right)^3 - Pa \sin\left(\frac{2\pi l}{4l}\right) + Pa \sin\left(\frac{2\pi}{l} \frac{3l}{4}\right)$

$-Pa \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + Pa \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

$= \frac{1}{2} EI\, \pi\, a^2 \left(\frac{2\pi}{l}\right)^3 - Pa - Pa = \frac{1}{2} EI\, \pi\, a^2 \left(\frac{2\pi}{l}\right)^3 - 2Pa$

2) On a comme condition aux limites $\begin{cases} v(0) = 0 \\ v(l) = 0 \\ v(l/2) = 0 \end{cases}$ déjà respecté par la forme sinusoïdale

3) On minimise l'énergie potentielle soit $\frac{\partial \Pi(a)}{\partial a} = 0 \iff \frac{1}{2} \times 2\, EI\, \pi\, a \left(\frac{2\pi}{l}\right)^3 - 2P = 0$

d'où $a = \frac{2P}{EI\, \pi \left(\frac{2\pi}{l}\right)^3}$ (suite fin DS)

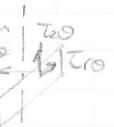
5

IV. ETUDE DES CONTRAINTES DANS UN BOUCHON

1. On aura donc en coordonnées cylindrique,

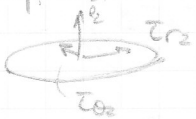
un tenseur de la forme $\begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta & \tau_{z\theta} \\ \tau_{rz} & \tau_{z\theta} & 0 \end{bmatrix}$

$\tau_{r\theta} = \tau_{z\theta} = 0$ (axisymétrie) $\quad u_\theta = 0 \quad \gamma_{r\theta} = \gamma_{z\theta} = 0$



2

et élasticité plane



$\tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0 = \sigma_z$ (contraintes planes)

$(u_z = 0) \qquad \gamma_{rz} = 0$

d'où le tenseur au final $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

et $[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$ } avec les hypothèses.

2. On pose $u_r(r) = C_1 r + C_2 \cdot \frac{1}{r}$

On a déjà $u_r(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$.

1 et ici $u_r(R) = R - \delta \rightarrow C_1 R = R - \delta \rightarrow C_1 = \frac{R-\delta}{R}$

d'où au final $u_r(r) = \frac{R-\delta}{R} r$

3. On a $\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{R-\delta}{R}$

$\varepsilon_\theta = \frac{R-\delta}{R r}$ car $u_\theta = 0$ et $\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}$.

$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\sigma_r - \frac{\nu}{E}\sigma_\theta = -\frac{\nu}{E}(\sigma_r - \sigma_\theta)$

2 Or (1) $\varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_\theta = \frac{R-\delta}{R}$

(2) $\varepsilon_\theta = -\frac{\nu}{E}\sigma_r + \frac{1}{E}\sigma_\theta = \left(\frac{R-\delta}{R}\right) \cdot \frac{1}{r}$

$\varepsilon_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G} = 0 \qquad \tau_{r\theta} = 0$

On a $\nu\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = -\frac{\nu^2}{E}\sigma_\theta + \frac{\sigma_\theta}{E} = \left(\frac{R-\delta}{R}\right)\left(\frac{1}{r} + \nu\right)$

d'où $\sigma_\theta = \left(\frac{R-\delta}{R}\right)\left(\frac{1}{r} + \nu\right) / \left(-\frac{\nu^2}{E} + \frac{1}{E}\right)$

(1) et donc $\sigma_r = \underbrace{\left(\frac{R-\delta}{R}\right)}_{\varepsilon_r} + \frac{\nu}{E}\sigma_\theta\Big) E = \left[\frac{R-\delta}{R} + \frac{\nu}{E}\left[\frac{\left(\frac{R-\delta}{R}\right)\left(\frac{1}{r}+\nu\right)}{-\frac{\nu^2}{E} + \frac{1}{E}}\right]\right] E$

On a donc, en simplifiant,

$$\sigma_r = \frac{R-\delta}{R} E + \frac{\nu E}{1-\nu^2}\left(\frac{R-\delta}{R}\right)\left(\frac{1}{r}+\nu\right)$$

et $\sigma_\theta = \dfrac{\left(\frac{R-\delta}{R}\right)\left(\frac{1}{r}+\nu\right) E}{1-\nu^2}$

d'où on a enfin $\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_r - \sigma_\theta)$ (Je n'ai pas recopié toute l'expression).

4. Si $\nu = 0$ alors $\sigma_r = \frac{R-\delta}{R} E = 11{,}56$ MPa

$\sigma_\theta = \frac{R-\delta}{R}\left(\frac{1}{R}\right) E = 0{,}963$ MPa

$\sigma_z = 0$

$\varepsilon_r = \frac{R-\delta}{R} = 0{,}77$

$\varepsilon_\theta = \frac{R-\delta}{R}\frac{1}{R} = 0{,}064.$

$\varepsilon_z = 0$

Fin exo 3

On a donc au final $v(x) = \dfrac{2P\ell^3}{EI\pi^4\delta} \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right)$

K

$$v(x) = \frac{P\ell^3}{EI\pi^4 4} \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right)$$

La flèche max est obtenue pour $i(x) = 0$

soit $K \frac{2\pi}{\ell}\cos\left(\frac{2\pi}{\ell}x\right) = 0$

$\frac{2\pi}{\ell}x = (k+1)\frac{\pi}{2}$ $\quad k=0 \to x = \frac{\ell\pi/2}{2\pi} = 1/4$

$k=1 \to x = \frac{3\ell}{2\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{3\ell}{4}$

donc on a une flèche max aux deux endroits en $\ell/4$ et $3\ell/4$

on calcule pour $\ell/4$ $\quad v(\ell/4) = \dfrac{P\ell^3}{EI\pi^4 4} \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi\ell}{4\ell}\right)}_{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1}$

$v_{max} = 0{,}0152$ mm $= 15{,}2$ µm.

Vendredi 8 février 2008

Calcul des structures

Durée : 2 h 30 SANS DOCUMENT

I Tenseur des contraintes

Un calcul éléments finis (hypothèse de l'élasticité plane) permet de déterminer qu'au point le plus critique, une structure est soumise à l'état de contrainte suivant (en MPa) :

$$[\sigma]=\begin{bmatrix}100 & 40\\ 40 & 40\end{bmatrix}$$

Cette structure est constituée d'un matériau élastique linéaire isotrope dont les caractéristiques sont les suivantes :

E = 70 GPa
ν = 0.33

On demande de donner:

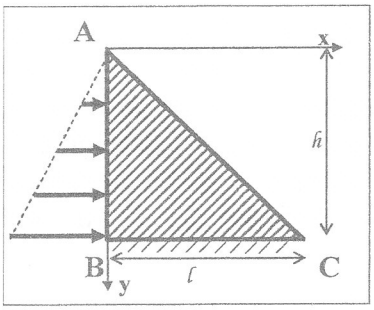
1. La valeur des contraintes principales.
2. L'orientation des directions principales.
3. La valeur du cisaillement maximum.

Remarque 1 : On ne précise pas quelle hypothèse a été utilisée (contraintes planes ou déformations planes). Si la réponse aux questions précédentes dépend de l'hypothèse utilisée, on donnera la réponse correspondant à chaque hypothèse.

Remarque 2 : Pour répondre aux questions, il peut être intéressant d'utiliser le cercle de Mohr.

II Étude d'un barrage

On souhaite déterminer les contraintes dans un barrage pesant (intensité de la pesanteur g dans la direction y), de masse volumique ρ_b) et dont la section est représentée sur la figure ci-contre. L'action de l'eau se traduit par une pression $P = \rho_e.g*y$ avec ρ_e, masse volumique de l'eau.



On considère qu'il s'agit d'un problème d'élasticité plane et plus particulièrement de déformations planes.

1. Pourquoi peut-on considérer qu'il s'agit plutôt de déformations planes que de contraintes planes ?

On suppose que les contraintes peuvent être exprimées de la façon suivante :

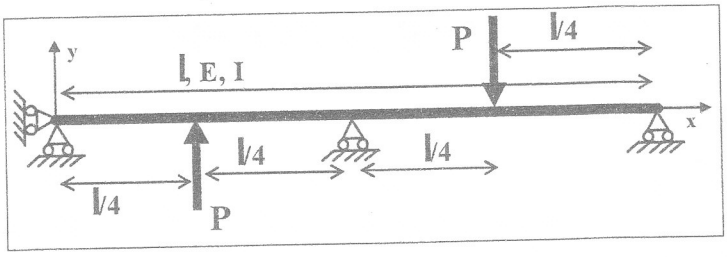
$$\begin{aligned}\sigma_x &= a_1 + a_2 * x + a_3 * y\\ \sigma_y &= b_1 + b_2 * x + b_3 * y\\ \tau_{xy} &= c_1 + c_2 * x + c_3 * y\end{aligned}$$

2. Déterminer la valeur des 9 coefficients en utilisant
   - Les Conditions Limites sur AB (x=0) et AC(x=y).
   - Les équations d'équilibres (en 2D)

3. Donner les composantes de la force surfacique appliquée sur AB (en fait, il ne s'agit pas d'une force imposée, mais d'une force de réaction).

III Méthode de Ritz

On considère une poutre de longueur ℓ, sur 3 appuis et soumise à 2 forces ponctuelles . Cette poutre est caractérisée par un moment quadratique I et un module d'Young E.



l = 0,5 m
I = 1000 mm^4
E = 210 GPa
P = 10 N

On cherche à déterminer une expression approchée de v(x), déplacement suivant la direction y. On utilisera pour cela la méthode de Ritz.

On demande :

1) De déterminer l'expression de l'énergie potentielle $\Pi(v(x))$.

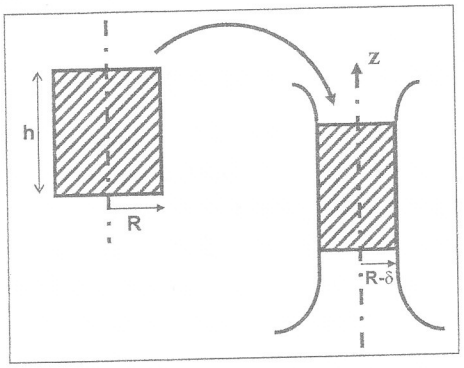
On prend comme approximation de v(x) une fonction sinusoïdale.

2) De donner l'expression de v(x) qui permette de vérifier les conditions limites.

3) De calculer l'amplitude de cette sinusoïde, de donner l'expression obtenue pour v(x) et d'en déduire la flèche maximum (on fera l'application numérique).

IV Étude des contraintes dans un bouchon

On considère un bouchon cylindrique de longueur **h** et de rayon **R**, inséré dans une bouteille de rayon **R**-δ. On souhaite déterminer la valeur des déformations et contraintes dans le bouchon, une fois inséré dans la bouteille. Le bouchon est constitué d'un matériau caractérisé par un module d'Young **E** et un coefficient de Poisson ν.



On considère qu'il s'agit ici d'un problème axisymétrique et d'élasticité plane (plus particulièrement de contraintes planes).

1. Donner l'expression simplifiée du tenseur des contraintes et du tenseur des déformations.

On montre que le déplacement radial solution d'un tel problème est de la forme suivante : $u_r(r) = C_1 * r + C_2 * \frac{1}{r}$

2. En utilisant les conditions limites du problème, donner l'expression des constantes C_1 et C_2.

3. En déduire l'expression de chacune des composantes de [ε], tenseur des déformations, et de [σ], tenseur des contraintes.

4. Effectuer les applications numériques en prenant :
   E = 15 MPa ν =0 R=12 mm δ = 2.75 mm

FORMULAIRE

Déformations en cartésien : $$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Déformations en Cylindrique :

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \qquad \gamma_{r\theta} = 2\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \gamma_{rz} = 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \qquad \gamma_{z\theta} = 2\varepsilon_{z\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}$$

Force surfacique: $\vec{t_s} = [\sigma] * \vec{n}$ $\vec{n}$: vecteur normal unitaire

Équations d'équilibre : $$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_{v_i} = 0$$

Loi de Hooke :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} \\ \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} \\ \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ & & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/G & 0 & 0 \\ & Sym & & & 1/G & 0 \\ & & & & & 1/G \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad G = \frac{E}{2(1+\upsilon)}$$

Loi de Hooke : $\sigma_{ij} = 2\mu * \varepsilon_{ij} + \delta_{ij} * \lambda\theta$ $\theta = tr([\varepsilon]) = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z$

$\delta_{ij} = 1 \quad si \quad i = j \quad et \quad \delta_{ij} = 0 \quad si \quad i \neq j$

Énergie de déformation d'un solide: $$W = \frac{1}{2}\int_v \{\varepsilon\}^T * \{\sigma\} dv$$

Énergie de déformation d'une barre : $$W(u) = \frac{1}{2} E S \int_l \dot{u}^2 dx$$

Énergie de déformation d'une poutre: $$W(v) = \frac{1}{2} E I \int_l \ddot{v}^2 dx$$

Énergie potentielle $$\Pi(\vec{u}) = W - \int_{S\sigma} \vec{t_S}.\vec{u}\, dS - \int_v \vec{f_v}.\vec{u}\, dv$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \pi$$